

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUE DANS LE VIDE

Sommaire

I	Equation de D'Alembert 1D (EDA 1D)	3
I.1	Une vieille connaissance de MPSI : l'onde transverse sur une corde vibrante	3
	a - Modélisation et équation dynamique	3
	b - La clé de la propagation : le couplage !	5
I.2	Ondes transverse et longitudinale dans un câble coaxial	6
	a - Modèle à constantes réparties - équations couplées	6
	b - Equation de propagation.	7
I.3	Solution de l'EDA 1D	8
	a - Rappel : groupement de variables spatio-temporel 1D	8
	b - Solution générale de l'EDA 1D : superposition d'ondes progressives	8
II	Equation de d'Alembert 3D des ondes électromagnétiques dans le vide	10
II.1	Rappels	10
II.2	Solutions en ondes planes progressives	10
	a - Définition de l'onde plane	10
	b - Ecriture de l'EDA pour une onde plane d'axe de propagation connu -solutions	11
II.3	Solution en ondes planes progressives monochromatiques (OPPH) - intérêt	12
	a - Définition et caractéristique	12
	b - Caractère non réaliste de l'OPPH - intérêt du modèle	13
	c - Spectre électromagnétique	14
III	Etude détaillée des OPPH	15
III.1	Vitesse de phase	15
III.2	Caractère non "dispersif" du vide	16
III.3	Structure des OPPH	16
	a - Préliminaire : opérateurs différentiels en notation complexe	16
	b - Transversalité - relations de structure	17
III.4	Polarisation des OPPH	18

a - Définition	18
b - Etude générale	18
c - Intérêt des polarisations rectiligne et circulaire	20
IV Energétique des ondes électromagnétiques	21
IV.1 Vecteur de Poynting d'une OPPH	21
IV.2 Densité volumique d'énergie d'une OPPH	21
IV.3 Vitesse de transport de l'énergie d'une OEM	22
IV.4 Retour sur la notation complexe	23
IV.5 Retour sur la polarisation : polaroïd et loi de Malus (utile pour TP)	23

I Equation de D'Alembert 1D (EDA 1D)

I.1 Une vieille connaissance de MPSI : l'onde transverse sur une corde vibrante

a - Modélisation et équation dynamique

On propose ici d'aborder les phénomènes propagatifs de manière très progressive et simple d'accès par l'exemple d'une corde sur laquelle se déplace une déformation.

En agitant l'une des extrémités d'une corde libre, on constate la propagation d'une « vague » le long de celle-ci. On peut noter que seule l'onde se déplace le long de la corde, par exemple selon l'axe $[Ox]$, et que le seul déplacement de la corde observé a lieu perpendiculairement à la direction de propagation de l'ondulation. On dit alors que l'onde est *transverse*. En outre, on se propose de réaliser la mise en équation de cette situation.

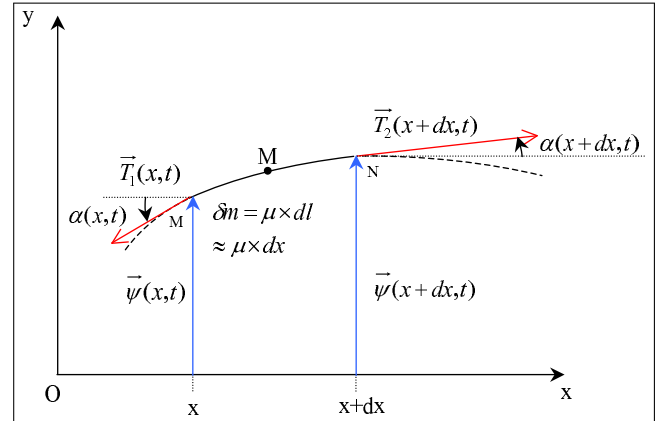


FIGURE XV.1 – Propagation sur une corde vibrante

Considérons une déformation sur une corde de section très faible face à sa longueur, et de masse linéique μ . Le vecteur déplacement du tronçon δl de corde en x à t s'écrit :

$$\vec{\psi}(\vec{r}, t) = \psi_x(x, t) \cdot \vec{e}_x + \psi_y(x, t) \cdot \vec{e}_y$$

HYPOTHÈSES :

- La pesanteur est négligée.
- La corde est sans raideur i.e. inextensible.
- On suppose l'absence d'amortissement.
- On suppose un déplacement uniquement transversal car corde inélastique donc avec $\psi_x(x, t) = 0$

$$\vec{\psi}(x, t) = \psi(x, t) \cdot \vec{e}_y$$

On appelle : $\begin{cases} \vec{T}_1(x, t) & \text{action de la partie gauche de la corde sur } \delta m \\ \vec{T}_2(x + dx, t) & \text{action de la partie droite de la corde sur } \delta m \end{cases}$

Appliquons enfin le théorème de la résultante cinétique sur la portion de longueur δl :

$$\mu \delta l \times \vec{a} = \sum_i \vec{F}_{i_{ext}}(\delta m)$$

soit :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \cdot \vec{e}_y = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

Projetons cette relation sur $[Ox]$ et $[Oy]$:

EQUATION 1 · \vec{e}_x : $0 = T_x(x + dx, t) - T_x(x, t) = T_2 \times \cos [\alpha(x + dx, t)] - T_1 \times \cos [\alpha(x, t)]$ (XV.1)

EQUATION 2 · \vec{e}_y : $\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = T_2 \times \sin [\alpha(x + dx, t)] - T_1 \times \sin [\alpha(x, t)]$ (XV.2)

• CAS DE L'ÉQUATION 1 :

Dans la mesure où la corde est inextensible, son inflexion maximale est faible; ainsi les angles étant très petits, on retiendra qu'à l'ordre 1 :

$$\cos [\alpha(x + dx, t)] \simeq \cos [\alpha(x, t)] \simeq 1$$

Compte tenu de ces deux dernières remarques, l'équation 1 conduit à :

$$T_2 = T_1$$
 (XV.3)

soit :

$$T(x + dx, t) = T(x, t) = T_0(t)$$
 (XV.4)

Ainsi, on retiendra que la norme de la tension appliquée en chaque point est constante le long de la corde à toute date t .

• CAS DE L'ÉQUATION 2 : Compte tenu de ce qui précède, la projection de la tension en tout point x sur l'axe $[Oy]$ s'écrit :

$$T_y(x, t) = +T_0 \sin [\alpha(x, t), t] \simeq T_0 \alpha(x, t)$$

et l'équation 2 conduit donc au premier ordre à :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = T_0 \alpha(x + dx, t) - T_0 \alpha(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot dx$$
 (XV.5)

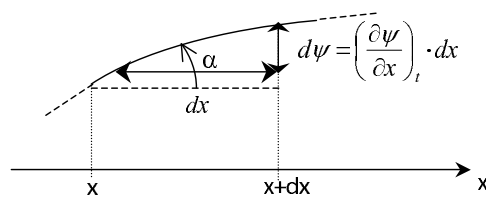


FIGURE XV.2 – Déformation de la corde

En assimilant l'angle α à sa tangente au premier ordre (α faible), on remarque que :

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right)_t \stackrel{\alpha \simeq 0}{\simeq} \alpha = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$$

L'équation 5 prend alors la forme suivante :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) \cdot dx \quad (\text{XV.6})$$

En outre :

$$\delta l = \sqrt{dx^2 + d\psi^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t dx \right)^2} = dx \sqrt{1 + \underbrace{\left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_t \right)^2}_{=\alpha^2 \Rightarrow \text{ordre 2}}} \simeq dx$$

Après simplification on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{XV.7})$$

ANALYSE DIMENSIONNELLE : $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$ en $m \cdot s^{-2}$ et $\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$ en m^{-1} ainsi : $c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ est homogène à une vitesse au carré $m^2 s^{-2}$.

Cette équation appelée **équation de d'Alembert (EDA) 1D** sera donc notée plus généralement :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{XV.8})$$

NB : le paramètre c est homogène à une vitesse ; on montrera plus bas qu'il s'agit bien de la vitesse de déplacement de l'onde.

b - La clé de la propagation : le couplage !

L'équation de d'Alembert se construit généralement à l'aide de deux équations aux dérivées partielles couplées. Dans le cas de la corde vibrante, les équations couplées utilisées étaient :

$$\mu \delta l \times \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_y(x + dx, t) - T_y(x, t) = \frac{\partial T_y}{\partial x} dx$$

soit avec $\delta l \simeq dx$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad \text{1}^{\text{ère}} \text{ équation couplée } (T_y \text{ et } \psi)$$

et également

$$T_y = T_0 \alpha = T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{2}^{\text{nd}} \text{e} \text{ équation couplée } (T_y \text{ et } \psi)$$

A RETENIR : c'est le couplage des deux équations précédentes qui permet de former l'EDA, équation de la propagation.

REMARQUE - (I.1) - 1:

Bien que couplées, ces deux équations sont de nature assez différentes : l'une est du second ordre par rapport au temps et premier par rapport à l'espace, et la seconde ne présente qu'une dérivée par rapport à l'espace.

On peut symétriser ces équations couplées en introduisant la vitesse de déplacement v_y (nécessairement selon l'axe $[Oy]$) avec $v_y = \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Ces dernières équations s'écriront alors

$$\begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} & (1) \\ \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} & (2) \end{cases}$$

En combinant $\frac{\partial(1)}{\partial t}$ et $\frac{\partial(2)}{\partial x}$ on obtient l'EDA régissant également l'évolution de l'onde de vitesse v_y :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

De même une combinaison avec $\frac{\partial(2)}{\partial t}$ et $\frac{\partial(1)}{\partial x}$ permet de dégager l'EDA régissant T_y :

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial T_y}{\partial x} = 0$$

I.2 Ondes transverse et longitudinale dans un câble coaxial

a - Modèle à constantes réparties - équations couplées

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs, l'un central appelé coeur et l'autre périphérique appelé gaine. L'espace entre les deux conducteurs est rempli d'un diélectrique (isolant par définition). On modélise une portion de câble de longueur dx par une portion de circuit illimité selon x et comportant une capacité élémentaire $dC = \Gamma dx$ et une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$. Γ et Λ sont respectivement la capacité et l'inductance linéique (constantes réparties). Une telle modélisation donne le circuit équivalent suivant :

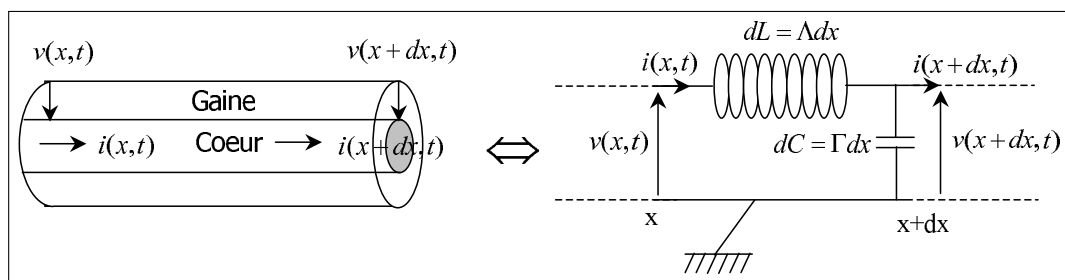


FIGURE XV.3 – Modélisation d'un câble coaxial

NB : on montre expérimentalement que l'espace interarmature est le siège de propagation d'une onde électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}).

Par ailleurs, on analyse ici un phénomène de propagation, c'est à dire **dans un contexte par définition hors ARQS**. En revanche, en prenant un petit tronçon de câble de longueur dx , ce dernier peut-être traité en ARQS à la condition que :

$$\frac{D}{c} \ll T \implies D \ll cT = \lambda \quad \text{soit} \quad dx \ll \lambda$$

IDÉE : on se place dans cette hypothèse \implies alors les lois de Kirschoff (lois des mailles et des noeuds) y seront applicables!

- LOI DES NOEUDS :

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + dC \frac{\partial v}{\partial t}(x + dx, t)$$

qui donne après développement au premier ordre en x :

$$i(x, t) = i(x, t) + \frac{\partial i}{\partial x} dx + \Gamma dx \left[\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}(x, t) dx \right]$$

qui devient en ne retenant que le premier ordre :

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x}(x, t) \simeq -\Gamma \frac{\partial v}{\partial t}(x, t)} \tag{XV.9}$$

- LOIS DES MAILLES :

$$v(x, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}(x, t) + v(x + dx, t)$$

Par développement au premier ordre, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}(x, t)} \tag{XV.10}$$

REMARQUE - (I.2) - 2:

Contrairement au cas de la corde vibrante, l'analyse par les lois fondamentales (lois des mailles et des noeuds) fournit directement des équations couplées "symétriques".

b - Equation de propagation.

Combinons ensuite les deux équations de couplage [XV.9](#) et [XV.10](#) :

$$\frac{\partial \text{XV.9}}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial \text{XV.10}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

permet d'obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = 0} \quad \text{EDA!!! pour l'onde longitudinale de courant en posant } c^2 = \frac{1}{\Gamma \Lambda}$$

De même :

$$\frac{\partial XV.9}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial XV.10}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$$

permet d'obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0} \quad \text{EDA!!! pour l'onde transverse de tension en posant } c^2 = \frac{1}{\Gamma \Lambda}$$

I.3 Solution de l'EDA 1D

a - Rappel : groupement de variables spatio-temporel 1D

On rappelle que lors de la propagation d'une onde 1D à la célérité c , les grandeurs $u = t - \frac{x}{c}$ pour une onde progressive se déplaçant vers x croissant et $v = t + \frac{x}{c}$ pour une onde progressive se déplaçant vers x décroissant sont invariantes.

On appelle u et v les groupements de variables spatio-temporels.

$$\Delta(u) = \Delta \left[t - \frac{x}{c} \right] = 0 \quad \text{pour une onde se déplaçant vers les } x \text{ croissant}$$

$$\Delta(v) = \Delta \left[t + \frac{x}{c} \right] = 0 \quad \text{pour une onde se déplaçant vers les } x \text{ décroissant}$$

A RETENIR :

PROPRIÉTÉ - (I.3) - 1:

Nous adopterons les groupements de variables $u = t - \frac{x}{c}$ et $v = t + \frac{x}{c}$ comme «nouvelles variables pertinentes» pour l'analyse des phénomènes propagatifs 1D (selon l'axe $[Ox]$).

b - Solution générale de l'EDA 1D : superposition d'ondes progressives

Appelons $\psi(x, t)$ la grandeur caractéristique du phénomène propagatif. L'équation de d'Alembert peut s'écrire sous forme d'opérateurs de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi = \square \psi = 0$$

QUESTION : (u, v) étant à priori les bonnes variables pour l'analyse d'un phénomène de propagation unidimensionnel, quelle est la formulation de l'EDA avec ce nouveau jeu de variables ?

Ecrivons la différentielle de la fonction d'onde $\psi = \psi(x, t) = \psi(u, v)$:

$$d\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x dt = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v du + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u dv$$

soit en divisant par ∂x (à t constant) et ∂t (à x constant) cette différentielle :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u \times \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_t = \frac{1}{c} \left(-\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_v \times \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)_u \times \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

soit en ne retenant que les opérateurs, on peut écrire dans une formulation symbolique très synthétique les transpositions suivantes (passage du jeu de variables (x, t) au jeu (u, v)) :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_t = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$

La notation opératorielle de l'équation de d'Alembert devient avec les variables u et v , en injectant les expressions ci-dessus des dérivées partielles selon x et t :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right] \times \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right] \psi = -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\right] \times \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right] \psi$$

ainsi :

$$\boxed{\square \psi = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0} \quad (\text{XV.11})$$

L'intégration ne pose pas de difficulté :

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = G(v)$$

Une seconde intégration, par rapport à v , nous donne :

$$\psi(u, v) = \underbrace{\int G(v) \cdot dv}_{=g(v)} + f(u) = f(u) + g(v)$$

PROPRIÉTÉ - (I.3) - 2:

La solution générale de l'EDA 1D

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

est donc une superposition de deux phénomènes ondulatoires progressifs à la célérité c , l'un se déplaçant dans le sens des x croissants $f(u = t - x/c)$ et l'autre dans le sens des x décroissants $g(v = t + x/c)$:

$$\psi(u, v) = \underbrace{f(u)}_{\text{onde } x \uparrow} + \underbrace{g(v)}_{\text{onde } x \downarrow}$$

Exercice de cours: (I.3) - n° 1 Montrer qu'une onde progressive seule $f(u = t - x/c)$ se déplaçant vers $x \nearrow$ est solution de l'EDA, et de même pour une onde $g(u = t + x/c)$ se déplaçant vers $x \searrow$.

II Equation de d'Alembert 3D des ondes électromagnétiques dans le vide

II.1 Rappels

Nous avons dégagé à la fin du chapitre précédent l'équation différentielle régissant l'évolution des champs électrique et magnétique dans une région vide d'espace et de charge :

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = \vec{0} \end{cases}$$

A RETENIR :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \vec{\Delta} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \text{Equation de d'Alembert à 3D}$$

A titre d'exemple, l'équation du champ \vec{E} une fois développée en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

II.2 Solutions en ondes planes progressives

a - Définition de l'onde plane

Un cas particulier, et de grande utilité des ondes est l'onde plane (déjà rencontrée lors de l'étude de la corde vibrante ou du câble coaxial que l'on définit ainsi :

- soit $\vec{e}_w = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z$ un vecteur unitaire pointant dans une direction fixe $[O; w]$ de l'espace par rapport au référentiel d'étude.
- soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

La projection H du point $M(x,y,z)$ sur l'axe $[Ow]$ défini par le vecteur unitaire \vec{e}_w a donc pour abscisse w sur cet axe :

$$OH = w = \vec{r} \cdot \vec{e}_w = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

On remarque sur la figure ci-contre que tous les points du plan \mathcal{P} perpendiculaire à la direction $[Ow]$ ont la même abscisse w sur cet axe.

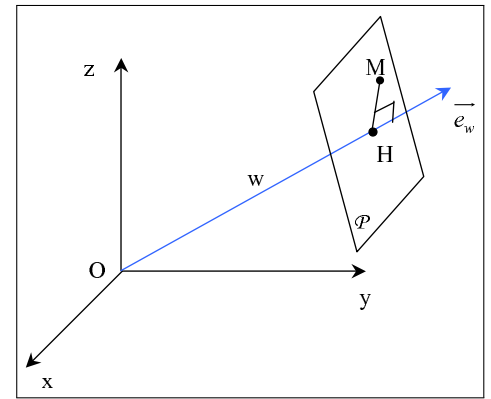


FIGURE XV.4 – Mise en évidence du plan d'onde

DÉFINITION - (II.2) - 1:

Lorsqu'une onde ne dépend spatialement que d'une seule variable attachée à un axe, ici w , ceci signifie que sa grandeur, par exemple le champ \vec{E} pour une OEM, possède la même valeur en tout point du plan \mathcal{P} perpendiculaire à la direction \vec{e}_w :

$$\vec{E}(w, t) \quad \text{ou} \quad \vec{B}(w, t)$$

L'onde est alors appelée onde plane et le plan \mathcal{P} est appelé plan d'onde.

b - Ecriture de l'EDA pour une onde plane d'axe de propagation connu -solutions

PRÉLIMINAIRE : Modification de l'opérateur Laplacien

On cherche à réécrire l'opérateur ∇ puis $\vec{\Delta}$ en fonction de la seule variable d'espace w attaché à l'axe de propagation.

Considérons une fonction scalaire $f(w, t)$ (ne dépendant spatialement que de la variable w).

Le vecteur unitaire de l'axe $[Ow]$ est $\vec{e}_w = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, et l'on considère un point $M(x, y, z)$ du plan d'onde d'abscisse $w = \alpha x + \beta y + \gamma z$. On a :

$$\vec{\nabla} f(w, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

soit :

$$\vec{\nabla} f(w, t) = \frac{\partial f}{\partial w} \left[\underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{=\alpha} \cdot \vec{e}_x + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{=\beta} \cdot \vec{e}_y + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{=\gamma} \cdot \vec{e}_z \right] = \frac{\partial f}{\partial w} [\alpha \cdot \vec{e}_x + \beta \cdot \vec{e}_y + \gamma \cdot \vec{e}_z] = \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

L'opérateur $\vec{\nabla}$ devient donc pour les problèmes à variable d'espace w unique :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial w} \cdot \vec{e}_w$$

et ainsi l'opérateur Δ reformulé avec cette même variable :

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

Finalement, pour une onde plane électromagnétique $\vec{E}(w, t)$ d'axe de propagation $[Ow]$ l'EDA s'écrit :

$$\vec{\Delta} \vec{E}(w, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \implies \boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}(w, t)}{\partial w^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(w, t)}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad (\text{XV.12})$$

La solution générale, est donc la superposition d'un champ électrique se propageant vers les w croissants \vec{E}_+ et d'une autre se propageant dans le sens des w décroissants \vec{E}_- :

$$\boxed{\vec{E}(w, t) = \vec{E}_+ \left(t - \frac{w}{c} \right) + \vec{E}_- \left(t + \frac{w}{c} \right)} \quad (\text{XV.13})$$

II.3 Solution en ondes planes progressives monochromatiques (OPPH) - intérêt

a - Définition et caractéristique

La suite propose de concentrer nos efforts sur cette classe particulière que sont les **O**ndes **P**lanes **P**rogressives **H**armoniques ou **O.P.P.H** dont l'intérêt relève de la même logique puisqu'elles serviront de base à la composition de toutes les ondes électromagnétiques, périodiques ou non.

DÉFINITION - (II.3) - 2:

Le champ électrique d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) se propageant, par exemple, dans la direction des w croissants, s'écrira avec ω la pulsation et φ la phase à l'origine :

$$\vec{E}(w, t) = \vec{E}_0 \times \cos \left[\omega \left(t - \frac{w}{c} \right) + \varphi \right] = \vec{E}_0 \times \cos [\omega t - kw + \varphi] \quad (\text{XV.14})$$

ou en forme complexe avec $\vec{E}(w, t) = \mathcal{R}_e \left[\underline{\vec{E}}(w, t) \right]$ et en posant $\underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 \cdot e^{j\varphi}$:

$$\underline{\vec{E}}(w, t) = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j[\omega(t - \frac{w}{c})]} = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - kw)} \quad (\text{XV.15})$$

En posant le vecteur d'onde $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_w = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{e}_w$, il vient : $k \cdot w = \vec{k} \cdot \vec{r}$ (avec $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$) et l'onde s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \times \cos [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi] \quad (\text{XV.16})$$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (\text{XV.17})$$

b - Caractère non réaliste de l'OPPH - intérêt du modèle

A RETENIR :

Du fait de son caractère périodique, une OPPH ne peut pas décrire un phénomène de propagation physique qui possède nécessairement un début et une fin. On parle de caractère « non réaliste » ou « non physique » de l'OPPH.

QUESTION : comment peut-on exploiter ce modèle pour décrire des phénomènes propagatifs réels ?

RÉPONSE : par synthèse de fourier.

Les résultats d'électrocinétique sur la synthèse de Fourier peuvent être totalement étendus aux cas de la description des phénomènes propagatifs.

- Si l'onde est périodique de pulsation ω : on peut décomposer en ondes harmoniques le signal propagé i.e. en série de Fourier :

$$\text{SF "en cosinus" : } \psi(t - x/c) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\psi_{m_n}}_{\text{coeff. Fourier} \equiv \text{amplitude harm. n}} \cos(n\omega(t - x/c) + \varphi_n)$$

$$\text{SF complexe : } \underline{\psi}(t - x/c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\underline{\psi}_{m_n}}_{\text{coeff. Fourier} \equiv \text{amplitude harm. n}} e^{j(n\omega(t - x/c))}$$

- Si l'onde n'est pas périodique (possède un "début" et une "fin"), le concept de transformée de Fourier permet de décomposer tout phénomène ondulatoire en une somme continue d'harmoniques :

$$\text{TF "en cosinus"} : \psi(t - x/c) = \int_0^{+\infty} \underbrace{g(\omega) \cdot \cos[\omega(t - x/c) + \varphi(\omega)]}_{\text{onde harmonique de pulsation } \omega \equiv \text{élément de base}} \cdot d\omega$$

$$\text{TF "classique"} : \psi(t - x/c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(\omega) \cdot e^{j[\omega(t - x/c)]}}_{\text{onde harmonique de pulsation } \omega \equiv \text{élément de base}} \cdot d\omega$$

$\underline{g}(\omega) = |g(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ est la densité spectrale complexe de l'onde i.e. sa transformée de Fourier (au facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

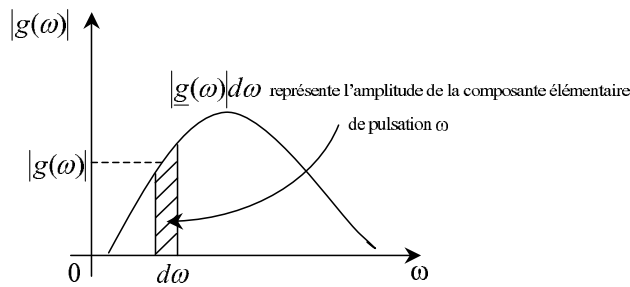


FIGURE XV.5 – Densité spectrale d'un signal non périodique (extension spatiale et temporelle finies)

Conclusion : l'étude de l'onde harmonique est fondamentale en raison de son caractère d'élément de base de toute décomposition d'onde. Ainsi toute onde peut être décrite comme une superposition d'ondes harmoniques.

c - Spectre électromagnétique

Les ondes électromagnétiques sont exploitées dans de très nombreux domaines ; sciences fondamentales (spectroscopie IR, RMN, Raman), technologies d'exploration (radiotélescope), technologies de communication (ondes hertziennes), médecine (IRM),

A RETENIR : (dans les grandes lignes à savoir les ordres de grandeurs)

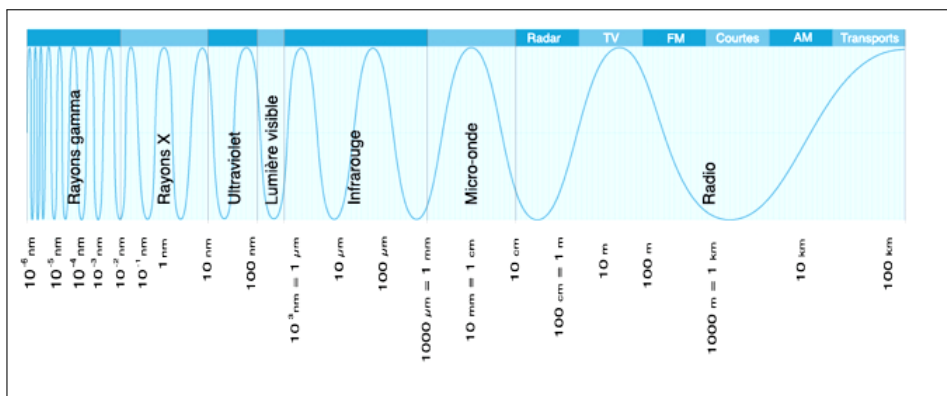


FIGURE XV.6 – Spectre électromagnétique en longueur d'onde

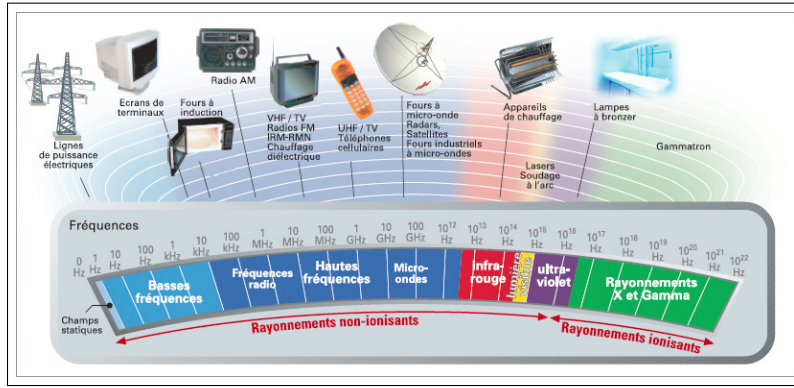


FIGURE XV.7 – Spectre électromagnétique en longueur d’onde

III Etude détaillée des OPPH

III.1 Vitesse de phase

Lors de la propagation d’une OPPH, la zone "équiphase" est par définition un plan (plan d’onde).

QUESTION : vitesse de déplacement du plan de phase ?

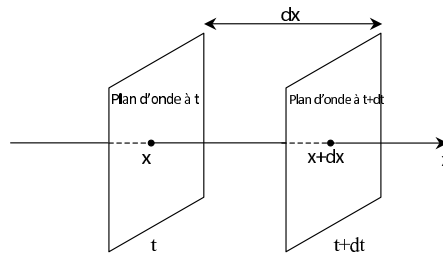


FIGURE XV.8 – Déplacement du plan de phase

Si l’on prend une OPPH se déplaçant dans le sens des x croissants :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - k_x x)}$$

alors la phase s’écrit :

$$\Phi(x, t) = \omega t - k_x x + \varphi \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Si pendant l’intervalle de temps élémentaire dt le plan de phase s’est déplacé d’une distance dx , alors la conservation de la valeur de l’onde et donc de sa phase pour ce plan impose :

$$\Phi(x + dx, t + dt) - \Phi(x, t) = d\Phi = \omega dt - k_x dx = 0$$

On définit alors la vitesse de déplacement du plan de phase ou vitesse de phase par :

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} = c \quad (\text{XV.18})$$

Conclusion : On constate donc que pour une onde monochromatique (ω unique), le plan de phase se déplace dans le vide à la vitesse c indépendante de la fréquence. On dit que le milieu est **non dispersif**.

III.2 Caractère non "dispersif" du vide

Exercice de cours: (III.2) - n° 2 Premier contact avec une relation de dispersion.

A partir de l'équation de d'Alembert, retrouver la relation liant la norme du vecteur d'onde k à la pulsation ω d'une OPPH. Conclusion quand à la vitesse des ondes en fonction de leur pulsation.

RÉPONSE :

On prend une OPPH de forme simple : $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$ se propageant dans le vide.

Après injection dans l'EDA, on a $-k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$

d'où :

$$k = \pm \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \neq f(\omega)$$

le milieu est alors dit non dispersif car la vitesse de phase est indépendante de la pulsation : intérêt plus tard dans l'analyse des paquets d'ondes constitués d'une superposition d'OPPH.

A retenir : La vitesse de déplacement d'une OPPH dans le vide est indépendante de la pulsation de celle-ci. On dit que le vide est **non dispersif**.

III.3 Structure des OPPH

a - Préliminaire : opérateurs différentiels en notation complexe

Prenons le cas le plus général d'une OPPH se déplaçant dans la direction du vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_w =$

$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Le champ électrique de cette dernière s'écrit dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0x} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z} \times \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

que l'on peut écrire en notation complexe :

$$\vec{E}(x, t) = \text{Re} \left[\overbrace{\left(E_{0x} \times e^{j\varphi_x} \cdot \vec{e}_x + E_{0y} \times e^{j\varphi_y} \cdot \vec{e}_y + E_{0z} \times e^{j\varphi_z} \cdot \vec{e}_z \right)}^{\vec{E}_0} \times e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right]$$

soit donc :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \underline{E}_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

L'action des opérateurs vectoriels prend une forme simple et très commode lorsque l'on utilise la notation complexe ;

on a : $\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t)$

c'est à dire :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = +j\omega \times}$$

De même pour une fonction scalaire quelconque de type $f(\vec{r}, t) = f_0 \cdot e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = f_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}$

on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -jk_x \cdot f \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -jk_y \cdot f \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -jk_z \cdot f \quad \text{soit :} \quad \boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = -j \vec{k}}$$

Ainsi, on montre facilement que les opérateurs habituels appliqués au champ complexe $\underline{\vec{E}}$ prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) \\ \text{rot} \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -j \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) \\ \Delta \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla}^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = -k^2 \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

REMARQUE - (III.3) - 3:

On peut utiliser indifféremment une autre convention pour la notation complexe des ondes planes :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

On doit alors modifier les opérateurs en conséquence :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -j\omega \times \\ \vec{\nabla} = +j\vec{k} \end{cases}$$

b - Transversalité - relations de structure

Reprenons chacune des équations de Maxwell et traduisons les en formalisme complexe :

- "MG" : $\text{div} \underline{\vec{E}} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = 0 \implies -j \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ donc :

$$\underline{\vec{E}} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \text{le champ électrique est transverse}$$

- "MT" $\text{div } \vec{B} = 0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies -j \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ donc :

$$\vec{B} \perp \vec{k} \Leftrightarrow \text{le champ magnétique est transverse}$$

- "MF" $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \implies -j \vec{k} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B}$
soit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Leftrightarrow \text{relation de structure de l'OPPH}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ cette relation devient :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_\omega \wedge \vec{E}}{c} \Leftrightarrow \text{relation générale de structure de l'onde plane}$$

(se démontre aussi à l'aide des équations de Maxwell pour des ondes non nécessairement harmoniques)

$\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ forment un trièdre direct

- "MA" \implies même conclusion !! (à faire à titre d'exercice)

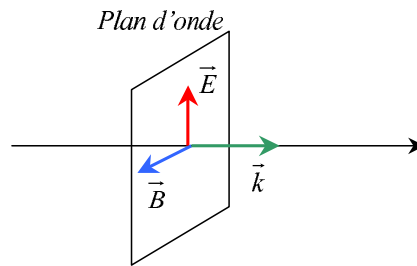


FIGURE XV.9 – Structure d'une OPPH

III.4 Polarisation des OPPH

a - Définition

DÉFINITION - (III.4) - 3:

L'étude de la polarisation d'une OPPH consiste à décrire l'évolution spatio-temporelle de la "pointe" du vecteur champ électrique/magnétique, lorsque ce dernier se déplace vers l'observateur (choix conventionnel).

b - Etude générale

Considérons une OPPH se dirigeant vers les x croissants (donc selon l'axe $[Ox]$) d'expression :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

En se plaçant dans le plan d'équation $x = 0$ le champ devient :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t + \varphi_z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Afin de faciliter l'étude, on procède au changement d'origine des phases suivant :

On pose t' tel que $\omega t' = \omega t + \varphi_y$ et on pose $\varphi = \varphi_z - \varphi_y$ donc :

$$\vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t') \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t' + \varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{Définition paramétrique d'une ellipse (Voir simulation MAPLE)}$$

NB : on rebaptise t' en t pour la suite.

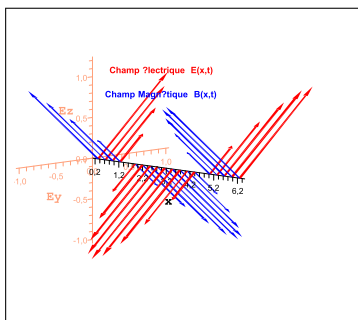
soit toujours en $x = 0$:

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

- Cas $\varphi = 0 \implies \frac{E_z}{E_{0z}} = \frac{E_y}{E_{0y}}$
soit

$$E_z = \frac{E_{0z}}{E_{0y}} \times E_y$$

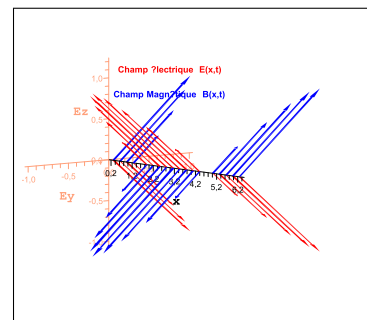
La "pointe" du vecteur champ électrique décrit ici une droite. On parle de polarisation rectiligne.



- Cas $\varphi = \pi \implies \frac{E_z}{E_{0z}} = -\frac{E_y}{E_{0y}}$
On obtient cette fois :

$$E_z = -\frac{E_{0z}}{E_{0y}} \times E_y$$

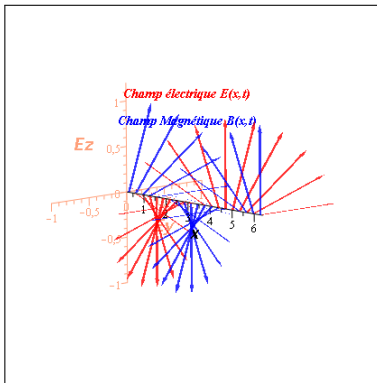
La pointe du vecteur champ électrique décrit encore une fois une droite de pente opposé au cas précédent. La polarisation est là-encore rectiligne.



- Cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et en posant $E_{0y} = E_{0z} = E_0$

$$\Rightarrow \vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \times \cos(\omega t) \\ E_z = -E_0 \times \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

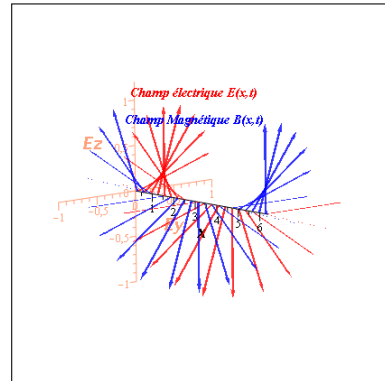
la pointe du vecteur champ électrique décrit un cercle en rotation droite : la polarisation est dite circulaire droite.



- Cas $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et en posant $E_{0y} = E_{0z} = E_0$

$$\Rightarrow \vec{E}(0, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \times \cos(\omega t) \\ E_z = E_0 \times \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

la pointe du vecteur champ électrique décrit un cercle en rotation gauche : la polarisation est dite circulaire gauche.



c - Intérêt des polarisations rectiligne et circulaire

- POLARISATION RECTILIGNE

Reprenons l'expression générale d'une OPPH se propageant selon $+\vec{e}_x$:

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{pmatrix}$$

Cette OPPH de polarisation quelconque (dépendant du couple (φ_y, φ_z)) correspond à la superposition de deux OPPH polarisées rectilignement :

$$\vec{E}(x, t) = \underbrace{E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \cdot \vec{e}_y}_{\text{OPPH polarisée rectilign.}} + \underbrace{E_{0z} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \cdot \vec{e}_z}_{\text{OPPH polarisée rectilign.}}$$

A retenir : une OPPH de polarisation quelconque peut être décomposée en une somme de deux OPPH polarisées rectilignement.

→ CF. TP POLARISATION.

- Polarisation circulaire

De même, toute OPPH polarisée rectilignement peut par exemple être décomposée en deux OPPH de polarisation circulaire droite et gauche. Ainsi :

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_{0y}}{2} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = \frac{E_{0y}}{2} \times \sin(\omega t - kx + \varphi_y) \end{pmatrix}}_{=OPPH\ PCG} + \underbrace{\begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_{0y}}{2} \times \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = -\frac{E_{0y}}{2} \times \sin(\omega t - kx + \varphi_y) \end{pmatrix}}_{=OPPH\ PCD}$$

IV Energétique des ondes électromagnétiques

IV.1 Vecteur de Poynting d'une OPPH

ATTENTION : le caractère non linéaire en E du vecteur de Poynting interdit l'usage de la notation complexe en dehors du calcul des valeurs moyennes (cf IV.4).

Considérons une OPPH se déplaçant dans le sens des x croissant, polarisée selon \vec{e}_y :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y$$

La champ magnétique de cette onde est obtenu par relation de structure : $\vec{B}(x, t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z$

Le vecteur de Poynting est donc :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x$$

VALEUR MOYENNE :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cdot \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cdot \vec{e}_x = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \vec{e}_x$$

A RETENIR : l'énergie se déplace dans la direction et le sens de la propagation.

DÉFINITION - (IV.1) - 4:

On définit l'intensité lumineuse I par le flux moyen surfacique de puissance (déjà vu en chapitre XIV) soit :

$$I = \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{n} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \vec{e}_x \cdot \vec{n}$$

IV.2 Densité volumique d'énergie d'une OPPH

L'établissement de l'identité de Poynting avait permis de dégager l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique, soit :

$$u_{em} = \underbrace{\frac{\epsilon_0 E^2}{2}}_{=u_e} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{=u_m}$$

En reprenant l'OPPH précédente : $\left[\begin{array}{l} E(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_y \\ B(x, t) = \frac{E_0}{c} \cdot \cos(\omega t - kx) \cdot \vec{e}_z \end{array} \right]$, il vient $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = u_e$

A RETENIR : pour une OPPH :

$$u_{em}(OPPH) = \underbrace{2u_e = 2u_m}_{\text{énergie équirépartie entre contrib. élec. et magn.}} = \epsilon_0 E^2$$

Soit une valeur moyenne :

$$\langle u_{em}(OPPH) \rangle = \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

IV.3 Vitesse de transport de l'énergie d'une OEM

On sait que le vecteur de Poynting indique la direction de transport de l'énergie. Notons \vec{v}_e la vitesse de propagation de l'énergie en un point M à l'instant t ; l'énergie traversant un élément de surface $d\vec{S}$ en M pendant la durée élémentaire dt est celle contenue dans le cylindre de base $d\vec{S}$ et de longueur $v_e \cdot dt$.

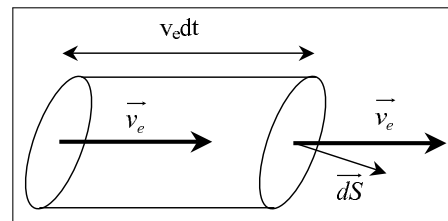


FIGURE XV.10 – Transport de l'énergie électromagnétique

Evaluons de deux manières l'énergie contenue dans ce cylindre :

- EN INTÉGRANT LA DENSITÉ D'ÉNERGIE :

Le volume de ce cylindre est $d\tau = (\vec{v}_e dt) \cdot d\vec{S}$, et il contient l'énergie élémentaire :

$$d^2\epsilon_{em} = u_{em}(\vec{v}_e dt) \cdot d\vec{S} \tag{XV.19}$$

- EN UTILISANT LE THÉORÈME DE POYNTING :

On peut également exprimer l'énergie élémentaire traversant la surface $d\vec{S}$ pendant dt à l'aide du vecteur de Poynting. En effet la puissance élémentaire traversant dS s'écrit :

$$dP_R(d\vec{S}) = \vec{R} \cdot d\vec{S} = \frac{d^2\epsilon_{em}}{dt}$$

d'où :

$$d^2\epsilon_{em} = \vec{R} \cdot d\vec{S} \cdot dt \tag{XV.20}$$

En rapprochant les expressions XV.19 et XV.20, il vient :

$$u_{em} \cdot \vec{v}_e = \vec{R}$$

soit la vitesse de propagation de l'énergie : $\vec{v}_e = \frac{\vec{R}}{u_{em}}$

On a donc pour une OPP dans le vide se déplaçant selon l'axe x vers $x \nearrow t$:

$$\vec{v}_e = \frac{\epsilon_0 c E^2 \vec{e}_x}{\epsilon_0 E^2} = c \vec{e}_x$$

IV.4 Retour sur la notation complexe

En live!!!

IV.5 Retour sur la polarisation : polaroïd et loi de Malus (utile pour TP)

En live!!!